Cours du Prof. Marco Picasso

Juin 2021

Durée: 2h15

Examen d’Analyse IV, 2021

Sections MT, SV

**Introduction**

Tentative de reconstitution de l’examen d’Analyse IV du 24 Juin 2021. L’examen est sur un total de 11.25 points. Ceci est une reconstitution faite de mémoire, l’exactitude des questions n’est pas garantie.

Chaque QCM possède une ou plusieurs réponses correctes. Pour les QCM ayant *N* bonnes réponses et *M* mauvaises réponses, on comptera:

• +1*/N* points pour chaque bonne réponse cochée

• *−*1*/M* points pour chaque mauvaise réponse cochée

• 0 points en cas d’abscence de réponse

Aucun document n’est permis, la calculatrice interdite.

**Partie 1 - Questions à Choix Multiples**

**Exercice 1:**

Soit *D* l’ensemble des fonctions de R *→* R à support compact. Soit *f* : R *→* R telle que *f*(*t*) = 0 pour *t <* 0, *f*(*t*) = *e−t* pour *t >* 0. Soit *Df* la dérivée au sens des distributions de *f*. On rappelle que, pour *ϕ ∈ D*, *hDf, ϕi* = *−hf, ϕ0i*, avec *hf, gi* =R +*∞*

que *hδ, ϕi* = *ϕ*(0)

Alors:

*Df* = *−f* + *δ*

*Df* = *f*

*Df* = *f* + *δ*

*Df* = *−f*

**Exercice 2:**

Soit *γ* le cercle centré en 0 et de rayon 1.

*−∞ f*(*x*)*g*(*x*) *dx*. De plus, la fonction delta de Dirac est telle

Pour quelles fonctions a-t-on R*γf*(*z*) *dz* = 0 ? *f*(*z*) = 1*z*

*f*(*z*) = cos(*z*)

*z*~~2~~

*f*(*z*) = 1

*z*(*z*+1)

*f*(*z*) = 1

(*z*+2)~~2~~

*f*(*z*) = cos(*z*)

*z*~~3~~

1

**Exercice 3:**

Soit *f* : C *→* C holomorphe, *γ ⊂* C une courbe simple fermée régulière, *z*0 *∈* int(*γ*). Alors:

+*∞*

*∀z ∈* C, *f*(*z*) = X

*n*=0

Z

*f*(*n*)(*z*0)

*n*!(*z − z*0)*n*

*γ*

Z *γ*

*f*(*z*) *dz* = 0

1

*z − z*0*dz* = 2*πi*

*f*(*n*)(*z*0) = *n*! 2*πi*

Z *γ*

*f*(*z*)

(*z − z*0)*ndz* +*∞*

*z − z*0=X

*∀z ∈* C, *z 6*= *z*0,*f*(*z*) *n*=0

*f*(*n*)(*z*0)

*n*!(*z − z*0)*n−*1

Z *γ*

*f*(*z*)

*z − z*0*dz* = 0

can’t remember

**Exercice 4:**

Cochez les bonnes affirmations: 1 *− z*=X

1

+*∞ n*=0

*zn*, *|z| <* 1

+*∞*

*z*=X

sin(*z*)

*n*=0

+*∞*

*z−*1 =X

*z*2*n*

(2*n* + 1)!, *z ∈* C 1

*e*1

*n*=0

*n*!(*z −* 1)*n, z ∈* C*, z 6*= 1 +*∞*

*z*(1 + *z*)=X

1

*n*=0

**Exercice 5:**

*zn−*1, *|z| <* 1 *(je ne sais plus si l’énoncé précise que z 6*= 0*)*

Soit *I* = Alors:

Z 2*π*

*~~√~~*5 *−* sin(*θ*), *γ* le cercle centré en 0 de rayon 1. On donne *z*1 = (*√*5 + 2)*i*, *z*2 = (*√*5 *−* 2)*i*.

*dθ*

0

Z

2

*I* = *I* = *π*

*−z*2 + *iz~~√~~*5 + 1*dz γ*

2

*I* = 2*πi* Res*z*2

*I* = 2*π*

2

*−z*2 + 2*iz~~√~~*5 + 1

**Exercice 6:**

Soit *u* : R *×* [0*,* +*∞*[*→* R satisfaisant: *∂*2*u*

 

*∂t*~~2~~ *−*14*∂*2*u*

*∂x*~~2~~ = 0 *x ∈* R*, t >* 0

*u*(*x,* 0) = *u*0(*x*) *x ∈* R *∂u*

*∂t* (*x,* 0) = 0 *x ∈* R

On note *u*ˆ(*α, t*) = *F*(*u*(*x, t*))(*α*), et on donne: • *F*(*f00*)(*α*) = (*iα*)2*F*(*f*)(*α*)

• *F*(*f*(*x* + *a*))(*α*) = *eiαaF*(*f*)(*α*)

Alors:

*∂*2*u*ˆ

*∂t*2(*α, t*) + *α*2*u*ˆ(*α, t*) = 0

*u*ˆ(*α, t*) = ˆ*u*(*α,* 0) cos( *αt*2)

*u*ˆ(*α, t*) = 1 *~~√~~*2*π*

Z +*∞ −∞*

*u*0(*x* +*α*2*t*) + *u*0(*x −α*2*t*)

2*e−iαx dx*

*u*(*x, t*) = *u*0*x* +*t*4+ *u*0*x −t*4

2

**Partie 2 - Questions Ouvertes Exercice 1:**

Soit l’équation différentielle:

 

*y00*(*t*) + 2*y0* + *y* = 1*, t >* 0 *y*(0) = 1

*y0*(0) = 1

On note *Y* (*z*) la transformée de Laplace de *y*.

1) Expliciter *Y* (*z*), décomposer en éléments simples.

2) En déduire *y*(*t*), vérifier que la fonction trouvée satisfait l’équation et les conditions initiales.

**Exercice 2:**

Soit *u* : [0*,* 1] *×* [0*,* +*∞*[*→* R satisfaisant:



*∂t* (*x, t*) *−∂*2*u*

*∂u*

*∂x*~~2~~ (*x, t*) = sin(2*πx*) 0 *< x <* 1*, t >* 0

*u*(0*, t*) = *u*(1*, t*) = 0 *t >* 0 

*u*(*x,* 0) = 1 0 *< x <* 1

On cherche la solution sous la forme: +*∞*

*u*(*x, t*) = X

*k*=0

Expliciter *b*2*k*+1(*t*) et *f*(*t*).

*b*2*k*+1(*t*) sin(*π*(2*k* + 1)*x*) + *f*(*t*) sin(2*πx*)

Indication: la solution de(

est donnée par

.

*y0*(*t*) + *ay*(*t*) = *b a, b ∈* R*, a 6*= 0 *y*(0) = *y*0

*y*(*t*) = *y*0*e−at* +*ba*1 *− e−at* 3

**Exercice 3:**

Soient *F*(*z*) = 1

(*z* + 1)2(*z* + 2), *r >* 2, Γ*r* = *Cr ∪ Lr* avec *Cr* = *{z ∈* C : *z* = *reiθ,π*2 *≤ θ ≤*3*π*2*}* et *Lr* = *{z ∈* C : *z* = *is, −r ≤ s ≤ r}*. On cherche pour *t >* 0 une fonction *f*(*t*) qui admet *F*(*z*) comme transformée de Laplace.

D’après un théorème du cours, nous avons pour *t >* 0, *f*(*t*) = 12*π*Z +*∞*

*F*(*is*)*eist ds*.

1) Utiliser le théorème des résidus pour exprimer Z

Z

Γ*r*

*−∞*

*F*(*z*)*ezt dz*.

2) Montrer que lim *r→*+*∞*

*F*(*z*)*ezt dz* = 0. *Cr*

3) En dédure l’expression de *f*(*t*).

4